ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x+i}\,dx.$$

2. Функция $u\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ является решением задачи Коши

$$2y\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R},$$

$$u(x,0)=x^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Найти функцию $u(x,y)$ и вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{\gamma}u(x,y)\,dx,$$

где кривая γ — это граница области $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \substack{x^2+y^2<1,\\ x<0,\ y>0}\right\}$, ориентированная против часовой стрелки.

3. Найти минимум функционала

$$J(u)=\int\limits_0^1\frac{(u'(x))^2}{x+2}\,dx,\quad u\in C^2[0,1],$$

на множестве $M=\left\{\ u\in C^2[0,1]\ \middle|\ u(0)=0,\ u(1)=1\ \right\}$, и указать экстремаль, доставляющую минимум.

4. Четыре студента, сдавая зачёт, независимо решают одну задачу, каждый с вероятностью $\frac{2}{5}$ может сделать ошибку, а, ошибившись дважды, получает незачёт. Найти вероятность того, что не менее трёх студентов сдадут зачёт, если известно, что каждый сделал хотя бы одну ошибку.

5. Решить задачу Коши

$$(x+1)u''(x)+2u'(x)=0,\quad x>0,$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)=1.$$

6. Решить уравнение

$$u(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} u(t)\,dt + \exp(-x), \quad x \geq 0.$$

7. Решить задачу Коши для уравнения Шрёдингера

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(0,x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \Delta u(t,x,y), \quad t > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0,x,y) = \cos(x)\exp(-y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y,z)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x,y,z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u(0,x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\frac{\partial u(0,x,y,z)}{\partial t} = \frac{1}{1 + (x + 2y + 2z)^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

10. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1} = -x^2 y.$$

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
1.	$\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x+i}\,dx=-\frac{\pi i}{e}$, $\int\limits_{-R}^{R}\frac{\exp(ix)}{x+i}\to 0, \qquad \int\limits_{-R}^{R}\frac{\exp(-ix)}{x+i}\to -2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=-i}\frac{\exp(-iz)}{z+i}=-\frac{2\pi i}{e}$
2.	$u(x,y)=\left(y^2-x\right)^2, \qquad \oint\limits_{\gamma}u(x,y)\,dx=-\frac{31}{30}$
3.	$u_*(x)=\frac{(x+2)^2-4}{5}, \qquad J(u_*)=\frac{2}{5}$
4.	$\frac{297}{625}=P(A_3\vert B)+P(A_4\vert B)=\frac{P(A_3B)+P(A_4B)}{P(B)}$, A_k — k студентов сдало зачёт, B — каждый студент ошибся, $P(A_3B)=4\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{16\cdot 216}{5^8}, \quad P(A_4B)=\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)^4=\frac{16\cdot 81}{5^8}$, $P(B)=\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)^4+4\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+$ $+6\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)^4=\frac{16\cdot 625}{5^8}$
5.	$u(x)=\dfrac{x}{x+1}, \quad x\geq 0$

ЗАДАЧА	ОТВЕТ
6.	$u(x) = C\exp(-x) - x\exp(-x), \quad \forall\, C \in \mathbb{R},$ $u'(x) = -u(x) - \exp(-x), \quad u(+\infty) = 0$
7.	$u(t,x) = \exp\big(it\big)\sin(x)$
8.	$u(t,x,y) = \dfrac{\exp\left(-\frac{y^2}{4t+1} - t\right)\cos(x)}{\sqrt{4t+1}}$
9.	$u(t,x,y,z) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x+2y+2z+3t) - \operatorname{arctg}(x+2y+2z-3t)}{6},$ $u(t,x,y,z) = f(t, x+2y+2z), \quad$ где $f_{tt} = 9f_{\xi\xi}, \quad f(0,\xi) = 0, \quad f_t(0,\xi) = \frac{1}{1+\xi^2},$ $f(t,\xi) = \frac{1}{6}\int\limits_{\xi-3t}^{\xi+3t} \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \frac{\operatorname{arctg}(\xi+3t) - \operatorname{arctg}(\xi-3t)}{6}$
10.	$u(t,x,y) = -\dfrac{r\sin\varphi + r^3\sin(3\varphi)}{4} = \dfrac{y^3 - 3x^2y - y}{4},$ где $\quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

Стоимость каждой задачи — два очка.